

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2018,
Convocatoria extraordinaria

mentoor.es



Opción A

Problema A.1. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (a - 1)y + z = 0 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}$$
 donde a es un parámetro real, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible.
- Las soluciones del sistema cuando $a = 1$.
- La solución del sistema cuando $a = 0$.

Solución:

- Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible.

Para estudiar la compatibilidad, aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 1 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante:

$$|A| = 1((a - 1)^2 - a) - 1(0 - 1) = a^2 - 2a + 1 - a + 1 = a^2 - 3a + 2.$$

Igualamos a cero: $a^2 - 3a + 2 = 0 \implies (a - 1)(a - 2) = 0$. Las raíces son $a = 1$ y $a = 2$.

Caso 1: $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

En este caso, $|A| \neq 0$, por lo que $\text{Rg}(A) = 3 = \text{Rg}(A^*)$. El sistema es **Compatible Determinado**.

Caso 2: $a = 1$.

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right). F_1 = F_3. \text{Rg}(A) = 2.$$

Como una fila es repetida, $\text{Rg}(A^*) = 2$. El sistema es **Compatible Indeterminado**.

Caso 3: $a = 2$.

$$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right). \text{Rg}(A) = 2.$$

Para $\text{Rg}(A^*)$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. $\text{Rg}(A^*) = 3$.

El sistema es **Incompatible**.

El sistema es compatible para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- Las soluciones del sistema cuando $a = 1$.

Para $a = 1$, es S.C.I. El sistema se reduce a: $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Hacemos $y = \lambda$. Entonces $x = 1 - \lambda$.

La solución es $(x, y, z) = (1 - \lambda, \lambda, 0)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

c) **La solución del sistema cuando $a = 0$.**

Para $a = 0$, es S.C.D. $|A| = 2$. El sistema es
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} .$$

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2}.$$

La solución es $(1/2, 1/2, 1/2)$.



Problema A.2. Geometría

Se tienen el plano $\pi : x - y + z - 3 = 0$, la recta $s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1, 1, 1)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La recta que pasa por A , corta a la recta s y es paralela al plano π .
- El plano que pasa por A , es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s .
- Discute si el punto $(3, 2, 1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5, 3, 1)$.

Solución:

- La recta que pasa por A , corta a la recta s y es paralela al plano π .

La recta buscada, r , se puede obtener como intersección de dos planos:

- Plano π_1 que contiene a A y a la recta s .

Parametrizamos s : $z = 0, x = 2y$. Sea $y = \lambda \implies s : (2\lambda, \lambda, 0)$.

$P_s(0, 0, 0), \vec{v}_s(2, 1, 0)$. $A\vec{P}_s = (-1, -1, -1)$.

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(x-1) + 2(y-1) - (z-1) = 0 \implies -x + 2y - z = 0.$$

- Plano π_2 que pasa por A y es paralelo a π .

Tendrá el mismo vector normal $\vec{n} = (1, -1, 1)$. Ecuación: $x - y + z + D = 0$.

Pasa por $A(1, 1, 1)$: $1 - 1 + 1 + D = 0 \implies D = -1$. Plano: $x - y + z - 1 = 0$.

La recta r es la intersección de estos dos planos.

$$\text{La recta es } r : \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

- El plano que pasa por A , es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s .

El plano buscado, π_b , pasa por $A(1, 1, 1)$ y está generado por el vector normal de π , $\vec{n}_\pi = (1, -1, 1)$, y el vector director de s , $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$.

$$\pi_b \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0 \implies -x + 2y + 3z - 4 = 0.$$

$$\text{El plano es } -x + 2y + 3z - 4 = 0.$$

- Discute si el punto $(3, 2, 1)$ está en la recta paralela a s que pasa por $(5, 3, 1)$.

La recta paralela a s , llamémosla s' , tiene el mismo vector director $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$ y pasa por $P'(5, 3, 1)$. Su ecuación paramétrica es: $s' \equiv (x, y, z) = (5, 3, 1) + t(2, 1, 0)$.

Para que el punto $Q(3, 2, 1)$ esté en la recta, debe existir un valor de t que satisfaga:

$$\begin{cases} 3 = 5 + 2t \implies 2t = -2 \implies t = -1 \\ 2 = 3 + t \implies t = -1 \\ 1 = 1 + 0t \implies 1 = 1 \end{cases}$$



Como el valor $t = -1$ satisface las tres ecuaciones, el punto sí pertenece a la recta.

Sí, el punto (3,2,1) pertenece a la recta.

Problema A.3. Análisis

Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a , b , c . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La relación entre los coeficientes a , b , c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$.
- La relación que deben verificar los coeficientes a , b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$.
- $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$.

Solución:

- La relación entre los coeficientes a , b , c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$.

$$f(1) = 22 \implies a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) \cos(\pi) = 22.$$

Como $\cos(\pi) = -1$, tenemos: $a + b - c = 22$.

La relación es $a + b - c = 22$.

- La relación que deben verificar los coeficientes...

La tangente es horizontal si la derivada es cero. $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c(\cos(\pi x) - x\pi \sin(\pi x)).$$

$$f'(1) = 3a + 2b + c(\cos(\pi) - \pi \sin(\pi)) = 3a + 2b + c(-1 - 0) = 3a + 2b - c.$$

$$f'(1) = 0 \implies 3a + 2b - c = 0.$$

La relación es $3a + 2b - c = 0$.

- $\int_0^1 x \cos(\pi x) dx$.

Integramos por partes: $u = x, dv = \cos(\pi x) dx$. $du = dx, v = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x)$.

$$\int x \cos(\pi x) dx = \frac{x}{\pi} \sin(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) dx = \frac{x}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi x).$$

$$\left[\frac{x \sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 = \left(\frac{\sin(\pi)}{\pi} + \frac{\cos(\pi)}{\pi^2} \right) - \left(0 + \frac{\cos(0)}{\pi^2} \right) = \left(0 - \frac{1}{\pi^2} \right) - \frac{1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

El valor de la integral es $-\frac{2}{\pi^2}$.

Opción B

Problema B.1. Álgebra

Resolver los siguientes apartados, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Dadas A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \text{ cumpla que } B^2 = B \text{ pero } AB \neq A \text{ y } BA \neq B.$$

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\text{y } \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Solución:

a) Dadas A y B , matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

$$A^2 = A \cdot A = (AB)A = A(BA) = AB = A.$$

$$B^2 = B \cdot B = (BA)B = B(AB) = BA = B.$$

Queda demostrado que ambas son idempotentes.

b) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \text{ cumpla que } B^2 = B \text{ pero } AB \neq A \text{ y } BA \neq B$$

$$B^2 = B \implies \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

$$a^2 = a \implies a(a-1) = 0 \implies a = 0 \text{ o } a = 1.$$

$$b^2 = b \implies b = 0 \text{ o } b = 1.$$

$$a + b = 1.$$

$$\text{Si } a = 0, b = 1. \text{ Si } a = 1, b = 0.$$

$$\text{Caso 1: } a = 0, b = 1. B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B.$$

$$\text{Caso 2: } a = 1, b = 0. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A. \text{ Esta matriz no cumple la condición.}$$



Los valores son $a = 0, b = 1$.

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix}$
 y $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6. \quad |D_2| = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 = 3.$$

$|D_1| = 6$ y $|D_2| = 3$.

Problema B.2. Geometría

Dada la recta $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$, se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta r .
- La ecuación del plano π que es paralelo a la recta r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$.
- La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior.

Solución:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta r .

Para parametrizar la recta, resolvemos el sistema.

Hacemos $y = \lambda$:

De la primera ecuación: $x = 3 - y = 3 - \lambda$.

De la segunda ecuación: $z = x + 4y - 8 = (3 - \lambda) + 4\lambda - 8 = 3\lambda - 5$.

Un punto de la recta es $(3, 0, -5)$ y su vector director es $(-1, 1, 3)$.

$$\text{Las ecuaciones paramétricas son } \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}.$$

- La ecuación del plano π que es paralelo a la recta r y pasa por los puntos $(5,0,1)$ y $(4,1,0)$.

El plano π está definido por un punto, $P(5, 0, 1)$, y dos vectores directores: el vector director de la recta r , $\vec{v}_r = (-1, 1, 3)$, y el vector que une los dos puntos dados, $\vec{PQ} = Q - P = (4 - 5, 1 - 0, 0 - 1) = (-1, 1, -1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - 5 & y - 0 & z - 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x - 5)(-1 - 3) - y(1 + 3) + (z - 1)(-1 + 1) = 0.$$

$$-4(x - 5) - 4y = 0 \implies -4x + 20 - 4y = 0 \implies x + y - 5 = 0.$$

$$\text{La ecuación del plano es } x + y - 5 = 0.$$

- La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior.

Como la recta r es paralela al plano π , la distancia entre ellos es la distancia desde cualquier punto de la recta r al plano π .

Tomamos el punto de r , $P_r(3, 0, -5)$.

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|3 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\text{La distancia es } \sqrt{2} \text{ unidades.}$$



Problema B.3. Análisis

Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que: Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R.
- El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima.
- Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima.

Solución:

- El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R.

Sea x la base de R e y su altura. $xy = 600 \implies y = 600/x$.

Las dimensiones de la cartulina son:

Base: $X = x + 2 + 2 = x + 4$.

Altura: $Y = y + 3 + 3 = y + 6$.

Área de la cartulina: $A(x) = (x + 4)(y + 6) = (x + 4)(600/x + 6)$.

$$\text{El área es } A(x) = (x + 4) \left(\frac{600}{x} + 6 \right).$$

- El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima.

$$A(x) = 600 + 6x + \frac{2400}{x} + 24 = 6x + \frac{2400}{x} + 624.$$

Derivamos para minimizar:

$$A'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}.$$

$$A'(x) = 0 \implies 6 = \frac{2400}{x^2} \implies x^2 = \frac{2400}{6} = 400 \implies x = 20.$$

La segunda derivada es $A''(x) = \frac{4800}{x^3}$, que es positiva, confirmando un mínimo.

$$\text{El valor de la base del rectángulo R es } x = 20 \text{ cm.}$$

- Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima.

Si la base de R es $x = 20$ cm, su altura es $y = 600/20 = 30$ cm.

Las dimensiones de la cartulina son:

Base: $X = x + 4 = 20 + 4 = 24$ cm.

Altura: $Y = y + 6 = 30 + 6 = 36$ cm.

$$\text{Las dimensiones de la cartulina son } 24 \text{ cm de base y } 36 \text{ cm de altura.}$$